JRPM: Jurnal Riset Pecinta Matematika
Volume 1, Nomor 2, Tahun 2024, Halaman 109−120
e-ISSN: 3063-1874

Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Mengestimasi Jumlah Penduduk Kota Samarinda dengan Menggunakan Model Logistik dan Eksponensial

Arya Kusuma Wardhana, Achmad Muhtadin, Kurniawan
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Mulawarman
Email korespondensi: achmad.muhtadin@fkip.unmul.co.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi jumlah penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030 menggunakan model matematika eksponensial dan logistik. Data yang digunakan adalah data historis jumlah penduduk dari Tahun 2010 hingga 2023, yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) dan Dinas Kependudukan dan Catatan Sipil (Disdukcapil). Analisis dilakukan menggunakan pendekatan deskriptif dengan validasi model berdasarkan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE). Hasil penelitian menunjukkan bahwa model eksponensial memberikan proyeksi yang lebih sesuai untuk jangka pendek, dengan estimasi jumlah penduduk sebesar 921.298 jiwa pada Tahun 2030. Namun, model logistik lebih relevan untuk memahami dinamika populasi jangka panjang, terutama dalam mempertimbangkan keterbatasan daya dukung lingkungan. Penelitian ini memberikan kontribusi dalam perencanaan pembangunan kota yang berkelanjutan, khususnya dalam pengelolaan sumber daya dan pengendalian pertumbuhan penduduk.

Kata kunci

Pertumbuhan penduduk, Model eksponensial, Model logistik, Proyeksi penduduk, Kota Samarinda

Abstract

This research aimed to estimate the population of Samarinda City in 2030 using exponential mathematical and logistical models. The data used was historical data on the population from 2010 to 2023, obtained from the Central Statistics Agency and the Population and Civil Registration Office. The analysis had been carried out using a descriptive approach with model validation based on Mean Absolute Percentage Error (MAPE). The results showed that the exponential model provided a more suitable projection for the short term, with an estimated population of 921,298 people in 2030. However, logistics models were more relevant to understand long-term population dynamics, especially in considering the limitations of environmental carrying capacity. This research had contributed to sustainable urban development planning, especially in resource management and population growth control.

Keywords

Population growth, Exponential model, Logistics model, Population projection, Samarinda City

How to cite:
Wardhana, A. K., Muhtadin, A., & Kurniawan. (2024). Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Mengestimasi Jumlah Penduduk Kota Samarinda dengan Menggunakan Model Logistik dan Eksponensial. *JRPM: Jurnal Riset Pecinta Matematika*, *1*(2), 109-120.

Pendahuluan

Pertumbuhan penduduk adalah perubahan jumlah populasi di suatu wilayah dalam periode tertentu. Pertumbuhan penduduk yang dapat dihitung berdasarkan selisih antara angka kelahiran, kematian, dan migrasi (perpindahan penduduk) (Mahendra, 2017). Hal ini sejalan dengan pendapat Mahendra (2017) yang mengatakan pertumbuhan penduduk merupakan pertambahan jumlah penduduk dalam suatu wilayah dan waktu tertentu yang terus menerus akan dipengaruhi oleh jumlah kelahiran bayi dan akan dikurangi oleh jumlah kematian pada semua golongan umur. Tingkat pertumbuhan populasi pada suatu wilayah akan secara langsung berpengaruh terhadap kondisi ekonomi, politik, budaya, dan lainnya. Pertumbuhan penduduk yang tidak terkendali dapat memicu berbagai dampak negatif, seperti meningkatnya ketimpangan sosial dan bertambahnya angka kemiskinan (Noviyanto & Fauzi, 2022). Oleh karena itu, diperlukan proyeksi jumlah penduduk di suatu wilayah termasuk di Kota Samarinda. Proyeksi penduduk merupakan hal yang penting dalam demografi. Perubahan penduduk dari waktu ke waktu, baik melalui kelahiran, kematian, maupun migrasi, berdampak besar terhadap berbagai aspek kehidupan masyarakat.

Dengan tingkat pertumbuhan penduduk yang terus meningkat, Samarinda menghadapi tantangan dalam mengelola ketersediaan sumber daya, pengendalian lingkungan, serta penyediaan layanan publik yang memadai. Oleh karena itu, model matematis berbasis persamaan diferensial sering digunakan untuk memprediksi jumlah penduduk di masa depan. Diferensial merupakan cabang ilmu matematika, yang permodelannya dapat merepresentasi suatu fenomena yang ada di lingkungan kehidupan sehari-hari. Sejalan dengan fenomena yang terjadi, bahwa banyaknya individu dalam suatu populasi akan bertambah seiring berjalannya waktu, dan laju pertumbuhan populasi merupakan suatu diferensial (Rozikin dkk., 2021). Model ini memungkinkan analisis yang lebih mendalam mengenai pengaruh berbagai faktor terhadap dinamika populasi, seperti tingkat kelahiran, kematian, dan migrasi.

Dalam matematika, estimasi jumlah penduduk dapat dilakukan dengan menggunakan model pertumbuhan eksponensial dan logistik. Model eksponensial merupakan model pertumbuhan populasi yang menggambarkan perkembangan populasi ideal dalam kondisi lingkungan tanpa batasan sumber daya. Model eksponensial memprediksi pertumbuhan yang terus meningkat tanpa batas. Walaupun pendekatan model eksponensial efektif menghitung jumlah penduduk tetapi diperlukan pendekatan lain yang mengasumsikan terbatasnya sumberdaya dan situasi biologis, seperti model logistik (Anggreini, 2020).

Model logistik mempertimbangkan daya dukung lingkungan yang membatasi populasi. Marbun dkk. (2024) mengungkapkan bahwa pertumbuhan populasi penduduk menggunakan persamaan logistik tidak dipengaruhi dengan adanya distribusi usia. Pada model logistik, terdapat batasan tertentu untuk mencegah populasi berkembang tanpa henti. Pertumbuhan populasi dalam model ini tidak hanya bergantung pada jumlah yang terus meningkat, tetapi juga pada kapasitas faktor logistik yang tersedia untuk menunjang kelangsungan hidup (Suryani & Khasanah, 2022). Sehingga, penelitian ini menerapkan kedua model tersebut dalam memperkirakan jumlah penduduk Kota Samarinda, sehingga dapat memberikan wawasan yang lebih mendalam mengenai dinamika dan pola pertumbuhan populasi di masa mendatang.

Teori lain yang dikemukakan oleh Pierre Verhulst menjelaskan bahwa pertumbuhan populasi tidak hanya ditentukan oleh jumlah individu yang terus meningkat, tetapi juga oleh keterbatasan sumber daya atau kapasitas logistik yang tersedia untuk menunjang kehidupan dalam populasi tersebut (Rozikin dkk., 2021). Berdasarkan teori tersebut, Samarinda mempunyai pertumbuhan yang kontinu, namun sumberdaya yang ada juga menjadi pembatas untuk populasi tetap tumbuh. Karena setiap individu dari suatu populasi memerlukan sumberdaya tersebut.

Ditinjau dari Badan Pusat Statistik, kota Samarinda merupakan kota dengan penduduk terpadat di pulau Kalimantan. Dengan luas wilayah sebesar $718\ km^2$ saja, dan jika dilihat dari pertumbuhan penduduknya yang semakin meningkat, maka dalam beberapa tahun kedepan dapat terjadi ledakan populasi. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu perhatian dan penanganan yang benar oleh pemerintah maupun lembaga lainnya dalam mengatasi hal tersebut. Padatnya penduduk dapat menyebabkan berbagai dampak yang negatif, seperti tingkat pengangguran yang tinggi, kemiskinan, kelaparan dan dampak lainnya. Salah satu cara untuk mengurangi dampak negatif tersebut adalah dengan menggunakan proyeksi pertumbuhan penduduk.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data historis jumlah penduduk Kota Samarinda dari sumber resmi, seperti Badan Pusat Statistik (BPS) dan Dinas Kependudukan dan Catatan Sipil (Disdukcapil). Penelitian ini akan menguji akurasi kedua model melalui metode analisis statistik untuk memastikan validitas proyeksi yang dihasilkan. Dengan demikian, hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi praktis dalam perencanaan pembangunan kota, khususnya dalam pengelolaan sumber daya yang lebih efektif dan berkelanjutan. Penelitian ini dirancang untuk menjawab pertanyaan mengenai bagaimana pola pertumbuhan penduduk Kota Samarinda di masa mendatang dapat diestimasi secara akurat menggunakan model eksponensial dan logistik, serta bagaimana kedua model ini dapat diterapkan untuk memahami dinamika populasi.

Metode

Penelitian ini bertujuan untuk mengestimasi jumlah penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030 menggunakan model matematika eksponensial dan logistik. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif dengan pendekatan kualitatif. Penelitian ini mendeskripsikan penerapan model matematika eksponensial dan logistik dalam mengestimasi jumlah penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030. Penelitian ini dilakukan berdasarkan data historis jumlah penduduk, serta validasi model untuk menentukan tingkat keakuratan dan kesesuaian dengan kondisi pertumbuhan penduduk. Penelitian ini dilakukan di Kota Samarinda dengan data diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Samarinda. Waktu pelaksanaan penelitian adalah pada semester ganjil tahun ajaran 2024/2025.

Data yang digunakan dalam penelitian ini meliputi data jumlah penduduk Kota Samarinda dari Tahun 2010 hingga 2023. Data diperoleh dari dokumen resmi yang dipublikasikan oleh BPS dan Disdukcapil kota Samarinda. Selain itu, teknik triangulasi sumber digunakan untuk memastikan keabsahan data. Validasi dilakukan dengan menghitung *Mean Absolut Percentage Error* (MAPE). Konsep MAPE sangat penting digunakan dalam memilih model terbaik diantara model lainnya. Model yang memiliki nilai MAPE terkecil dianggap paling sesuai untuk menggambarkan dinamika pertumbuhan penduduk Kota Samarinda (Andika, 2024). Adapun rumus menghitung dari MAPE adalah sebagai berikut:

$$MAPE = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left|\frac{P_{(t)} - \bar{P}_{(t)}}{P_{(t)}}\right| \times 100\%$$

dengan variabel $P_{(t)}$ merupakan besarnya populasi sebenarnya pada waktu t, $\bar{P}_{(t)}$ adalah jumlah populasi yang diproyeksikan pada waktu t, dan N mewakili jumlah pengamatan data populasi. Interpretasi nilai MAPE disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Interpretasi *Mean Absolut Percentage Error* (MAPE)

Nilai MAPE	Interpretasi MAPE
$\text{MAPE} < 10\%$	Sangat akurat
$10\% \leq \text{MAPE} < 15\%$	Sangat baik
$15\% \leq \text{MAPE} < 20\%$	Baik
$20\% \leq \text{MAPE} < 50\%$	Masuk akal
$\text{MAPE} > 50\%$	Tidak akurat

Hasil dan Pembahasan

Data pertumbuhan penduduk Kota Samarinda yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data pertumbuhan penduduk Tahun 2013 sampai dengan Tahun 2023 yang ditunjukkan oleh Tabel 2.

Tabel 2. Data Pertumbuhan Penduduk di Kota Samarinda Tahun 2013-2023.

Tahun (t)	Jumlah penduduk (jiwa)	Tahun (t)	Jumlah penduduk (jiwa)
2013	805.688	2018	858.080
2014	830.676	2019	872.768
2015	812.597	2020	827.994
2016	828.303	2021	831.460
2017	843.446	2022	834.824
		2023	850.629

Sumber: Badan Pusat Statistik Kota Samarinda

A. Analisis Model Eksponensial Pertumbuhan Populasi Kota Samarinda

Dalam merumuskan model pertumbuhan populasi dibutuhkan hukum yang memengaruhi populasi dan fakta eksperimental yaitu hukum kekekalan populasi dan fakta eksperimental populasi. Pada hukum kekekalan populasi, perubahan populasi dalam suatu periode tertentu dapat mengalami pertambahan dikarenakan banyaknya individu yang masuk (kelahiran dan imigrasi), dan dapat pula mengalami pengurangan yang disebabkan oleh banyaknya individu yang keluar (kematian dan emigrasi). Sementara untuk fakta eksperimental populasi, individu yang bereproduksi dan yang mati dalam suatu populasi pada suatu periode waktu tertentu adalah konstan. Selanjutnya, berikut ini asumsi-asumsi yang digunakan dalam pertumbuhan eksponensial (Saptaningtyas & Ahmadi, 2022):

1. Laju kelahiran dan kematian adalah konstan dan kontinu
2. Tidak ada struktur gender
3. Tidak ada perbedaan usia
4. Tidak ada waktu tunda atau *time delay*
5. Migrasi diabaikan.

Misalnya P menunjukkan banyaknya populasi dan t menunjukkan waktu, maka $P_{(t)}$ merupakan banyaknya populasi pada satuan waktu t. Sedangkan banyaknya populasi dalam satuan waktu berikutnya dinotasikan dalam $P_{(t+1)}$. Berdasarkan asumsi diperoleh model matematis seperti pada Persamaan (1) dan (2).

$$P_{(t+1)} = P_t + B - A \tag{1}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = B - A \tag{2}$$

dengan:

$P_{(t+1)}$ = perubahan populasi dari satu waktu ke waktu berikutnya

$\frac{\Delta P}{\Delta t}$ = besarnya perubahan populasi dari waktu t ke $(t+1)$

B = angka kelahiran

A = angka kematian

Oleh karena perubahan besar suatu populasi dari waktu ke waktu berikutnya merupakan suatu diferensial (Stewart, 2002), sehingga persamaan (2) menjadi

$$\frac{dP}{dt} = B - A. \tag{3}$$

Perubahan dalam populasi dipengaruhi oleh laju pertumbuhan populasi itu sendiri. Berdasarkan asumsi ini, dapat disimpulkan bahwa jumlah kelahiran bergantung pada laju kelahiran (β), sedangkan jumlah kematian dipengaruhi oleh laju kematian (α), yaitu:

$$B = \beta P_{(t)}; \beta = \text{konstanta pembanding angka kelahiran}$$

$$A = \alpha P_{(t)}\ ; \alpha = \text{konstanta pembanding angka kematian}$$

Sehingga persamaan (3) menjadi

$$\frac{dP}{dt} = \beta P_{(t)} - \alpha P_{(t)} \tag{4}$$

Jika $\beta - \alpha = r$, dengan r dinyatakan sebagai laju pertumbuhan populasi, maka diperoleh

$$\frac{dP}{dt} = rP_{(t)} \quad ; P_{(t)} > 0 \tag{5}$$

dengan r adalah suatu konstanta. Persamaan (5) merupakan persamaan diferensial linear orde satu. Penyelesaian untuk persamaan (5) dilakukan dengan cara pemisahan variabel sehingga diperoleh $P(t) = e^{rt+c}$. Jika $e^c = A$, maka

$$P(t) = Ae^{rt} \tag{6}$$

Untuk melihat konstanta A diamati bahwa apabila diberikan nilai awal $t = 0$, sehingga besarnya populasi saat $t = 0$ merupakan populasi awal (P_0), diperoleh $P_0 = Ae^{r \cdot 0} = A$. Karena A merupakan besarnya populasi awal (P_0). Sehingga penyelesaian khusus dari persamaan (5) adalah

$$P(t) = P_0 e^{rt} \tag{7}$$

dengan : $P(t)$ = jumlah individu dalam populasi pada waktu t

P_0 = besarnya populasi saat t = 0

r = laju pertumbuhan populasi dalam periode waktu tertentu

t = waktu

Persamaan (7) disebut sebagai model pertumbuhan eksponensial. Untuk menentukan harga dari r atau laju pertumbuhan populasi dapat diturunkan dari persamaan tersebut, yaitu

$$r = \frac{\ln\left(\frac{P(t)}{P_0}\right)}{t}. \tag{8}$$

B. Aproksimasi dan Proyeksi Model Eksponensial

Oleh karena model eksponensial hanya dapat memproyeksi untuk periode waktu yang singkat saja, sehingga untuk menguji validitasnya peneliti menggunakan data jumlah penduduk Kota Samarinda Tahun 2015 hingga 2020. Untuk setiap harga (r) yang disubstitusikan ke persamaan eksponensial akan membentuk beberapa permodelan. Dengan Tahun 2015 sebagai titik awal ketika $t = 0$ dengan $P_0 = 812597$. Kemudian diperoleh laju pertumbuhan untuk nilai $t = 1$ pada Tahun 2016 diperoleh $r = 0{,}01914$. Selanjutnya, nilai r disubstitusikan ke dalam persamaan (7) dan diperoleh $P(t) = 812597e^{(0{,}01914)t}$. Perhitungan untuk model 2, 3, 4, 5 diperoleh dengan mengganti harga r pada persamaan sesuai dengan nilai $t = 2, 3, 4, 5$. Diperoleh model 1 bentuk persamaannya $P(t) = 812597e^{(0{,}01914)t}$, model 2 bentuk persamaannya $P(t) = 812597e^{(0{,}01863)t}$, model 3 bentuk persamaannya $P(t) = 812597e^{(0{,}01815)t}$, model 4 bentuk persamaannya $P(t) = 812597e^{(0{,}01786)t}$, dan model 5 bentuk persamaannya $P(t) = 812597e^{(0{,}00375)t}$.

Setelah didapat bentuk persamaan model eksponensial dari model 1 hingga model 5, selanjutnya dilakukan proyeksi jumlah penduduk Kota Samarinda dari Tahun 2015 hingga 2020 dan MAPE masing-masing model eksponensial. Proyeksi jumlah penduduk dan MAPE dapat dilihat dalam Tabel 3.

Tabel 3. Perbandingan Data Jumlah Penduduk Aktual dan Model Eksponensial

Tahun	Jumlah penduduk (Aktual)	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5
2015	812.597	812.597	812.597	812.597	812.597	812.597
2016	828.303	828.303	827.878	827.480	827.240	815.650
2017	843.446	844.313	843.446	842.636	842.148	818.714
2018	858.080	860.632	859.306	858.070	857.323	821.790
2019	872.768	877.266	875.465	873.786	872.773	824.878
2020	827.994	894.222	891.928	889.790	888.501	827.977
MAPE(%)		1,49	1,37	1,30	1,28	2,36

Tabel 3. menunjukkan hasil perhitungan dengan model 4 memiliki MAPE terkecil (1,28%) dengan kriteria sangat akurat. Kemudian dengan memandang kecenderungan eror dari aproksimasi tersebut sehingga peneliti lebih memilih model tersebut yang dinyatakan sebagai model yang valid untuk digunakan dalam memproyeksikan jumlah penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030. Adapun permodelan tersebut sebagai berikut:

$$P(t) = 812597e^{(0{,}01786)t}$$

Selanjutnya untuk memprediksi penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030, diperoleh $t = 15$. Adapun hasil estimasi jumlah penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030 dengan menggunakan model pertumbuhan eksponensial adalah sekitar 1.062.240 jiwa.

C. Analisis Model Logistik Pertumbuhan Populasi Kota Samarinda

Pada Tahun 1838, Pierre Verhulst mengembangkan model logistik sebagai bentuk penyempurnaan dari model eksponensial (Zulkarnaen, 2015). Model ini didasarkan pada kenyataan bahwa populasi sering kali tumbuh secara eksponensial pada tahap awal, tetapi laju pertumbuhannya akan melambat ketika jumlah populasi mendekati daya tampung lingkungan (*carrying capacity*). Hal ini disebabkan oleh keterbatasan sumber daya yang tersedia, seperti makanan, air, dan ruang, yang semakin habis seiring bertambahnya populasi. Dalam kondisi ini, individu dalam populasi harus berkompetisi untuk mendapatkan sumber daya yang semakin terbatas (Stewart, 2002).

Model logistik memperhitungkan faktor-faktor pembatas tersebut melalui sejumlah asumsi sebagai berikut:

1. laju kelahiran (β) adalah konstan;
2. laju kematian (α) tidak konstan (linear);
3. model ini mengabaikan perbedaan usia atau gender dalam populasi, sehingga populasi dianggap homogen. Selain itu, migrasi tidak diperhitungkan, dan tidak ada jeda waktu (*time delay*) dalam respons pertumbuhan populasi terhadap perubahan kondisi.

Asumsi-asumsi ini memungkinkan model logistik untuk menggambarkan pertumbuhan populasi dengan lebih realistis, terutama dalam konteks keterbatasan lingkungan. Dengan model ini, dinamika populasi dapat dianalisis secara mendalam, menunjukkan pola pertumbuhan yang melambat ketika populasi mendekati daya dukung lingkungan. Hal ini menjadikan model logistik sebagai alat penting untuk memahami dan merencanakan pengelolaan populasi di wilayah dengan sumber daya yang terbatas. Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, dapat dikembangkan permodelan pada model eksponensial menjadi sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = \beta P_{(t)} - \alpha P_{(t)} - \gamma P_{(t)}^2 \quad ; \; \gamma > 0 \tag{9}$$

dimana γ merupakan konstanta pembanding dari angka kematian karena kepadatan. Oleh karena $(\beta - \alpha) = r$, sehingga

$$\frac{dP}{dt} = rP_{(t)} - \gamma P_{(t)}^2. \tag{10}$$

Oleh karena kepadatan pada suatu wilayah disebabkan oleh laju pertumbuhan (r) yang tinggi kemudian mengakibatkan terjadinya penyusutan terhadap daya tampung (K) sehingga peningkatan pada angka kematian dalam populasi akan terjadi. Sehingga persamaan (10) dapat menjadi:

$$\frac{dP}{dt} = rP_{(t)}\left(1 - \frac{P_{(t)}}{K}\right) \tag{11}$$

Dari persamaan (11) dapat diketahui, jika populasi masih dapat didukung oleh wilayah $\left(P_{(t)} < K\right)$, maka $\frac{P_{(t)}}{K}$ mendekati 0 dan besarnya pertumbuhan populasi akan sebanding dengan besarnya populasi saat itu $\left(\frac{dP}{dt} \approx rP_{(t)}\right)$. Namun jika populasi mendekati daya tampungnya $\left(P_{(t)} \to K\right)$, maka $\frac{P_{(t)}}{K} \to 1$, sehingga $\frac{dP}{dt} \to 0$, berarti penambahan (atau penurunan) populasi melambat. Jika populasi masih mungkin untuk bertambah dikarenakan kapasitas tampung masih mendukung $\left(0 < P_{(t)} < K\right)$, maka pertumbuhannya akan mengalami penambahan $\left(\frac{dP}{dt} > 0\right)$. Tetapi jika populasi melampaui kapasitas tampungnya $\left(P_{(t)} > K\right)$, maka $1 - \frac{P_{(t)}}{K}$ bernilai negatif, sehingga besarnya perubahan populasi akan mengalami penurunan $\left(\frac{dP}{dt} < 0\right)$.

Penyelesaian dari persamaan logistik dapat dicari dengan pemisahan variabel, diperoleh:

$$\int \frac{1}{P}\, dP + \int \frac{1}{K - P}\, dP = \int r \;\; dt$$

$$\ln|P| - \ln|K - P| = rt + C$$

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + C$$

$$P(t) = \frac{Ke^{rt+C}}{1+e^{rt+C}} \tag{12}$$

Jika persamaan (12) diberikan nilai awal $t = 0$ dan $P(0) = P_0$, maka diperoleh:

$$C = \ln\left(\frac{P_0}{K-P_0}\right)$$

Substitusi nilai C dalam persamaan (12) diperoleh:

$$P(t) = \frac{Ke^{rt+ln\left(\frac{P_0}{K-P_0}\right)}}{1+e^{rt+ln\left(\frac{P_0}{K-P_0}\right)}}$$

$$P(t) = \frac{K}{(e^{rt}P_0)^{-1}\cdot(K-P_0+e^{rt}P_0)}$$

$$P(t) = \frac{K}{e^{-rt}\left(\frac{K}{P_0}-1\right)+1} \tag{13}$$

dimana:

$P_{(t)}$ = besarnya populasi pada saat waktu t.
e = bilangan Euler = 2,71828182845905.
r = laju pertumbuhan penduduk.
K = daya tampung.
t = waktu.

Oleh karena $\gamma = \frac{r}{K}$, persamaan (13) menjadi:

$$P(t) = \frac{\frac{r}{\gamma}}{e^{-rt}\left(\frac{\frac{r}{\gamma}}{P_0}-1\right)+1} \tag{14}$$

Parameter r dan K dapat diperkirakan dari jumlah populasi untuk tiga waktu yang berbeda tetapi dalam space waktu pengambilan data sama. Jika P_0 adalah populasi pada $t = 0$, maka P_1 pada saat waktu $t = T$ dan P_2 pada saat waktu $t = 2T$ dimana T adalah bilangan asli.

1. Untuk $t = T$, diperoleh

$$\frac{1}{P_T} - \frac{e^{-rT}}{P_0} = \frac{\gamma}{r}[1-e^{-rT}] \tag{15}$$

2. Untuk $t = 2T$, digunakan cara yang sama ketika $t = T$, diperoleh

$$\frac{1}{P_{2T}} - \frac{e^{-2rT}}{P_0} = \frac{\gamma}{r}[1-e^{-2rT}] \tag{16}$$

Kemudian lakukan pembagian persamaan (16) dan (15) untuk mengeliminasi $\frac{\gamma}{r}$ diperoleh:

$$\frac{\frac{\gamma}{r}[1-e^{-2rT}]}{\frac{\gamma}{r}[1-e^{-rT}]} = \frac{\frac{1}{P_{2T}} - \frac{e^{-2rT}}{P_0}}{\frac{1}{P_T} - \frac{e^{-rT}}{P_0}}$$

$$1+e^{-rT}=\frac{\frac{1}{P_{2T}}-\frac{e^{-2rT}}{P_0}}{\frac{1}{P_T}-\frac{e^{-rT}}{P_0}}$$

$$e^{-rT}=\frac{P_0(P_{2T}-P_T)}{P_{2T}(P_T-P_0)} \tag{17}$$

Untuk menghitung laju pertumbuhan populasi (r) digunakan perhitungan:

$$r=\frac{1}{T}\ln\left|\frac{P_0(P_{2T}-P_T)}{P_{2T}(P_T-P_0)}\right|$$

Disubstitusikan persamaan (17) ke (15) sehingga diperoleh perhitungan untuk kapasitas tampungnya sebagai berikut:

$$K=\frac{P_T(2P_{2T}P_0-P_{2T}P_T-P_0P_T)}{P_{2T}P_0-P_T^2}$$

D. Aproksimasi dan Proyeksi Model Logistik

Dalam model logistik, tidak ada batasan khusus terkait data yang harus digunakan, sehingga data yang tersedia dapat dimanfaatkan secara fleksibel untuk analisis. Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan data jumlah penduduk Kota Samarinda dari tahun tertentu hingga tahun terakhir yang tersedia. Penggunaan data tersebut bertujuan untuk memahami dinamika pertumbuhan penduduk di Kota Samarinda pada masa mendatang. Selain itu, analisis ini juga memungkinkan untuk mengidentifikasi faktor-faktor lain yang mungkin memengaruhi pola pertumbuhan penduduk, seperti perubahan kebijakan, kondisi sosial-ekonomi, dan keterbatasan sumber daya lingkungan. Hal ini memberikan wawasan yang lebih komprehensif mengenai proyeksi populasi dan tantangan yang mungkin dihadapi di masa depan. Perkiraan jumlah penduduk yang dapat ditampung dan didukung oleh Kota Samarinda adalah sebesar $K=959421$ jiwa. Perhitungan untuk mencari laju pertumbuhan (r) didasarkan pada interval waktu pengambilan data dengan *space* yang berbeda. Selain itu, peneliti juga menghitung nilai r dengan data populasi awal yang berbeda-beda. Tujuannya adalah untuk melihat karakteristik pertumbuhan penduduk Kota Samarinda. Hasilnya disajikan dalam Tabel 4.

Tabel 4. Hasil Perhitungan Laju Pertumbuhan Model Logistik

No	Populasi awal (P_0)	Laju pertumbuhan dengan *space* tahun 1	2	3	4	5	6
1	2010	0,167	0,107	0,457	0,219	0,368	0,479
2	2011	0,106	1,027	0,627	0,284	0,646	
3	2012	0,041	1,548	-0,092	-0,135	0,409	
4	2013	0,332	-0,725	-0,199	1,080		
5	2014	0,138	-1,249	-0,065	0,016		
6	2015	0,074	0,061	0,186			
7	2016	0,070	-0,005	0,055			
8	2017	0,030	-0,179				
9	2018	-1,150	0,728				
10	2019	2,510					
11	2020	0,038					

Berdasarkan Tabel 4, didapat informasi bahwa selalu mengalami tren positif dan seiring berjalannya waktu pertumbuhan penduduk menjadi naik turun, sehingga parameter r yang digunakan adalah harga r dengan *space* 5 tahun, yakni 0,368; 0,646 dan 0,409. Jika diperhatikan, peneliti mendapatkan beberapa model aproksimasi dengan laju pertumbuhan dan variasi terhadap populasi awal P_0 dengan masing-masing kriterianya atau keakuratannya. Peneliti menyimpulkan bahwa model logistik yang paling akurat untuk digunakan dalam memprediksi jumlah penduduk adalah model aproksimasi I dengan laju pertumbuhan sebesar 0,368 dan populasi awal (P_0) adalah data Tahun 2012. Hal ini dikarenakan model ini memiliki nilai MAPE terkecil sebesar 9,9% seperti yang tertera dalam Tabel 5. Untuk melanjutkan proyeksi penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030 diperoleh $t = 18$. Sehingga estimasi jumlah penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030 dengan model ini adalah sekitar 959130 jiwa.

Tabel 5. Laju Pertumbuhan dan MAPE Masing-Masing Selang Pengambilan Sampel Model Logistik

Aproksimasi	Populasi awal (P_0)	Laju pertumbuhan (r)	MAPE (%)
I	2010	0,368	10,5
	2011		10,2
	2012		9,9
II	2010	0,646	13,4
	2011		11,3
	2012		12,3
III	2010	0,409	11,2
	2011		10,7
	2012		10,5

E. Perbandingan Model Eksponensial dan Logistik

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan berbagai model, estimasi jumlah penduduk Kota Samarinda menunjukkan bahwa model eksponensial memberikan hasil yang lebih sesuai dibandingkan model logistik karena nilai MAPE model eksponensial (1,28%) lebih kecil dibandingkan nilai MAPE model logistik (9,9%). Hal ini sejalan hasil penelitian oleh Rozikin dkk. (2021) yang menunjukkan bahwa model eksponensial memiliki tingkat kepercayaan yang lebih tinggi dibandingkan dengan model logistik. Selain itu, hasil penelitian ini disebabkan oleh kondisi Kota Samarinda yang masih memiliki ruang cukup luas untuk pertumbuhan penduduk secara signifikan, baik dari segi lahan maupun potensi pengembangan wilayah. Sehingga model eksponensial menjadi pilihan yang relevan untuk menggambarkan tren pertumbuhan dalam jangka waktu tertentu karena pola pertumbuhan penduduknya masih cenderung meningkat secara cepat.

Sebagai acuan, jika suatu wilayah seperti Kota Samarinda masih memiliki ruang yang memadai untuk menopang kehidupan populasi yang terus bertambah, maka penggunaan model eksponensial dapat memberikan gambaran estimasi yang efektif, meskipun hanya untuk jangka pendek. Hal ini dikarenakan model eksponensial tidak mempertimbangkan kapasitas tampung wilayah dalam jangka panjang, sehingga terdapat risiko prediksi berlebihan apabila diaplikasikan pada rentang waktu yang terlalu panjang, yang dapat menyebabkan kemungkinan ledakan populasi (Rozikin dkk., 2021). Sebaliknya, jika di masa depan Kota Samarinda mulai menghadapi keterbatasan ruang atau sumber daya untuk mendukung pertumbuhan penduduk, maka model logistik menjadi alternatif yang lebih relevan. Model ini dapat digunakan untuk memperkirakan kapasitas tampung wilayah dan menganalisis dinamika pertumbuhan yang lebih terkendali. Dengan demikian, model logistik mampu membantu dalam perencanaan yang berkelanjutan guna menciptakan keseimbangan antara jumlah penduduk, daya dukung wilayah, dan kualitas hidup, sehingga mendukung pengembangan sumber daya manusia yang unggul di Kota Samarinda.

Kesimpulan

Estimasi jumlah penduduk Kota Samarinda menggunakan model eksponensial dan logistik menunjukkan bahwa model eksponensial lebih sesuai untuk menggambarkan pertumbuhan penduduk saat ini, karena Kota Samarinda masih memiliki ruang yang cukup untuk mendukung pertumbuhan populasi secara signifikan. Namun, model eksponensial hanya relevan untuk proyeksi jangka pendek karena tidak mempertimbangkan keterbatasan kapasitas lingkungan, sehingga berisiko menghasilkan prediksi yang tidak realistis dalam jangka panjang. Sebaliknya, model logistik lebih cocok diterapkan apabila pertumbuhan penduduk Kota Samarinda mendekati daya tampung lingkungan. Model ini mempertimbangkan keterbatasan sumber daya dan memberikan proyeksi yang lebih realistis untuk pengelolaan populasi yang berkelanjutan. Adapun hasil perhitungan estimasi jumlah penduduk Kota Samarinda pada Tahun 2030 adalah sebesar 1.062.240 jiwa.

Referensi

Andika, R. (2024). Penerapan Model Eksponensial dan Logistik dalam Prediksi Populasi: Studi Kasus Kota Palembang. *Jurnal Informatika dan Teknik Elektro Terapan*, *12*(2), 853–861. https://doi.org/10.23960/jitet.v12i2.4005

Anggreini, D. (2020). Penerapan Model Populasi Kontinu pada Perhitungan Proyeksi Penduduk di Indonesia (Studi Kasus: Provinsi Jawa Timur). *E-Jurnal Matematika*, *9*(4), 229–239. https://doi.org/10.24843/MTK.2020.v09.i04.p303

Mahendra, A. (2017). Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Fertilitas di Indonesia. *Jurnal Riset Akuntansi & Keuangan*, 223–242. https://doi.org/10.54367/jrak.v3i2.448

Marbun, B. V. S., Amiruddin, M. N. K., Lestari, F., Padila, W. N., Lestari, L., & Rasyid, M. H. A. (2024). Proyeksi pertumbuhan penduduk Sulawesi Tenggara dengan menggunakan model eksponensial dan model logistik. *Jurnal Aplikasi Fisika*, *20*(2), 24–30. https://doi.org/10.62749/jaf.v20i02.p24-30

Noviyanto, H., & Fauzi, A. (2022). Prediksi Pertumbuhan Penduduk di Indonesia Menggunakan Metode Least Square. *MAp (Mathematics and Applications) Journal*, *4*(2), 155–162. https://doi.org/10.15548/map.v4i2.4835

Rozikin, N., Sarjana, K., Arjudin, A., & Hikmah, N. (2021). Aplikasi Persamaan Diferensial Dalam Mengestimasi Jumlah Penduduk dengan Menggunakan Model Eksponensial dan Logistik. *Griya Journal of Mathematics Education and Application*, *1*(1), 44–55. https://doi.org/10.29303/griya.v1i1.7

Saptaningtyas, F., & Ahmadi, A. (2022). Tinjauan Matematis Waktu Tundaan pada Model Covid-19 dengan Vaksinansi. *PYTHAGORAS : Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *17*(1), 308–320. https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i1.49372

Stewart, J. S. (2002). *Kalkulus Jilid 1*, Penerjemah: I Nyoman Susila. Erlangga. https://library.walisongo.ac.id/slims/index.php?p=show_detail&id=13037

Suryani, I., & Khasanah, N. (2022). Model Eksponensial dan Logistik Serta Analisis Kestabilan Model Pada Perhitungan Proyeksi Penduduk Provinsi Riau. *Jurnal Fourier*, *11*(1), 22–39. https://doi.org/10.14421/fourier.2022.111.22-39

Zulkarnaen, D. (2015). Proyeksi Populasi Penduduk Kota bandung Menggunakan Model Pertumbuhan Populasi Verhulst dengan Memvariasikan Interval Pengambilan Sampel. *JURNAL ISTEK*, *8*(1), 128–141. https://journal.uinsgd.ac.id/index.php/istek/article/view/209